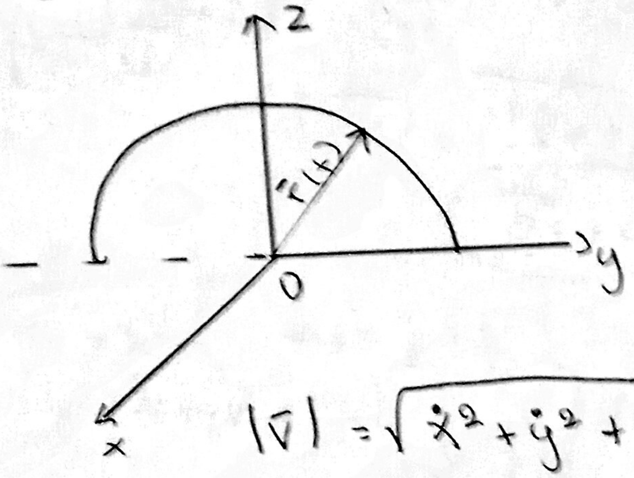
Μάθημα 19ο $\qquad$ 23/05/2019

Κλασική

<u>Παράδειγμα</u>: Μεταλλικό σύρμα κείται επί ενός καμπύλης ημικύκλιο $y^2+z^2=1,\ z\geq 0$ στο yz-επίπεδο. ΚΜ; αν $g(x,y,z)=2-z$

<u>Λύση</u>



$$m=\int_\ell \rho(\vec r)\,ds=\int_\ell \rho|\vec v|\,dt$$

$$\ell:\ \vec r(t)=0\vec i+\cos t\,\vec j+\sin t\,\vec k,\qquad 0\leq t\leq \pi$$

$$|\vec v|=\sqrt{\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2}=\sqrt{0+\sin^2t+\cos^2t}=1$$

<u>Άρα</u>: $m=\int_\ell (2-z)\,dt=\int_0^\pi (2-\sin t)\,dt=2\pi-2$

$$M_{yz}=\int_\ell x\rho\,ds=\int_\ell x\rho|\vec v|\,dt=\int_0^\pi 0(2-\overset{\sin t}{z})\,dt=0$$

$$M_{xz}=\int_\ell y(2-z)|\vec v|\,dt=\int_\ell \cos t(2-\sin t)\,dt=0$$

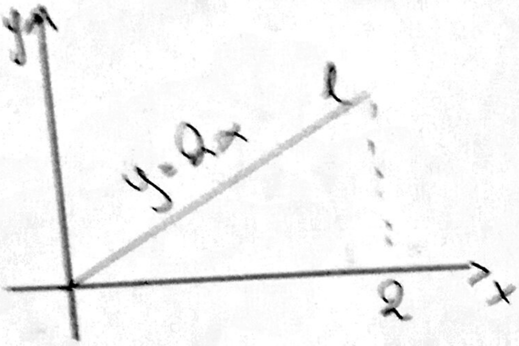
$$M_{xy}=\int_\ell z(t)(2-z)|\vec v|\,dt=\int_0^\pi (2\sin t-\sin^2t)\,dt=\frac{8-\pi}{2}$$

<u>Άρα</u>: Το δ.θ. του ΚΜ είναι: $\bar r_s=\left(0,0,\frac{8-\pi}{2}\right)$

Παράδειγμα Να βρεθεί το ΚΜ στην καμπύλη $y=2x$, δθ. $\bar{r}_s$ όταν $\rho=$σταθερό.

Λύση

Έστω ℓ η ράβδος



$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \Rightarrow ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$$

Άρα: $$ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{d}{dx}(2x)\right)^2} =$$
$$= \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$$

Άρα $ds = \sqrt{5}$

$$m = \int_\ell \rho\, ds = \int_\ell \rho \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \rho\sqrt{5}\int_0^2 dx = 2\rho\sqrt{5}$$

$$M_y = \int_\ell x\rho\, ds = \rho\int_\ell x\sqrt{5}\, dx = \rho\sqrt{5}\int_0^2 x\, dx = \rho\sqrt{5}\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2\rho\sqrt{5}$$

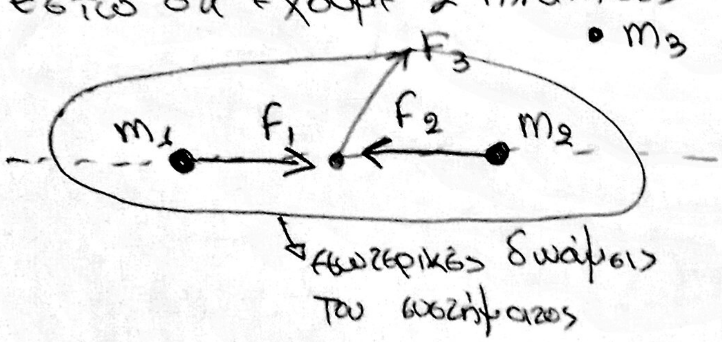
$$M_x = \int_\ell y\rho\, ds = \int_\ell y\sqrt{5}\, dx = \rho\sqrt{5}\int_0^2 y\, dx = \rho\sqrt{5}\int_0^2 2x\, dx = \dots = 4\rho\sqrt{5}$$

Άρα: $\bar{x} = \frac{M_y}{m} = 1$, $\bar{y} = \frac{M_x}{m} = 2$

οπότε: $\bar{r}_s = 1\bar{i} + 2\bar{j} = (1,2)$

Δυνάμεις σε Σύστημα Υ.Σ.

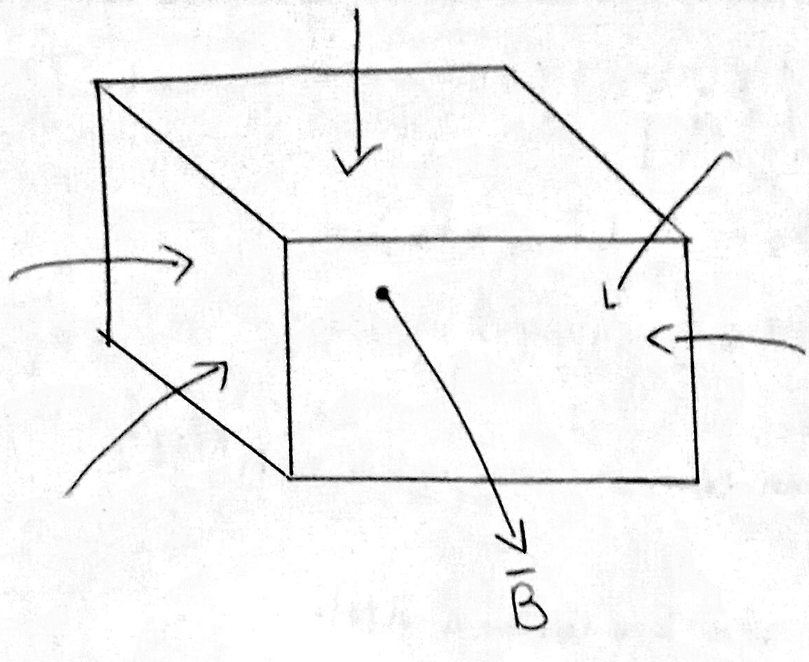
Έστω ότι έχουμε 2 πλανήτες



F_1, F_2: ισορροπούν το σύστημα

F_3: μια εξωτερική δύναμη που ασκείται στο σύστημα.

Έστω μία μάζα m_3 εκτός συστήματος. Τότε αυτή θα ασκεί κάποια δύναμη; $\Rightarrow$ ΝΑΙ.



όγκος ρευστού
ασκείται το βάρος που είναι
μία εξωτερική δύναμη

Υπάρχουν και επιφανειακές
τάσεις (δυνάμεις) που
ασκούνται στο σύστημα
(αυξάνουν την πίεση στο σύστημα)

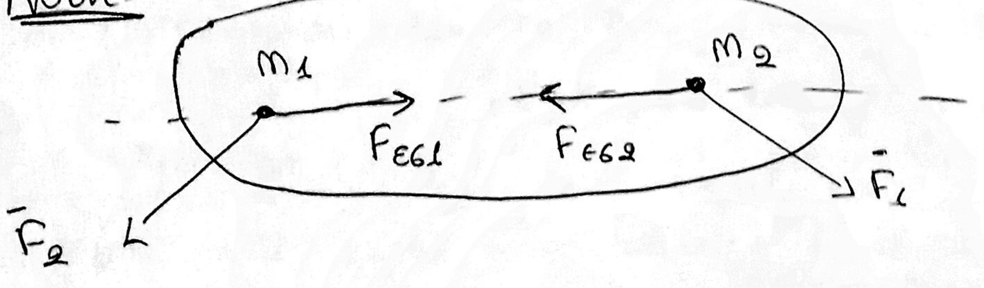
Παράδειγμα

$m_1 = 2kg$, $m_2 = 8kg$ (Σύστημα Υ.Σ.)

Εξωτερικές δυνάμεις: $\begin{cases} \bar{F}_1 = 2t\bar{i} - t\bar{j} - 5t\bar{k} \\ \bar{F}_2 = t\bar{i} + 2t\bar{j} - 8t\bar{k} \end{cases}$

Να βρεθεί η επιτάχυνση του ΚΜ, $\bar{a}_s$ και η επιτάχυνση $\bar{a}_2$ της m_2 όταν $\bar{F}_{εσ} = -2t^2\bar{j}$

Λύση.



Εφόσον μιλάω για επιτάχυνση σημαίνει ότι θέλω την ορμή, άρα θα χρησιμοποιήσω τον 2ο N.N.

$$M\frac{d^2\bar{r}_s}{dt^2} = \sum_{i=1}^{N} F_i \Rightarrow M\bar{a}_s = \sum_{i=1}^{N} F_i$$

0 διότι το σύστημα ισορροπεί

Για το πρόβλημα έχουμε: $M\bar{a}_s = \Sigma\bar{F}_{εσ} + \Sigma\bar{F}_{εξ} \Rightarrow M\bar{a}_s = \Sigma\bar{F}_{εξ}$

$$\Rightarrow \bar{a}_s = \frac{\sum_{i=1}^{2} F_{εξ}}{M} = \frac{1}{10}(2t\bar{i} - t\bar{j} - 5t\bar{k} + t\bar{i} + 2t\bar{j} - 8t\bar{k}) \Rightarrow$$

$$\boxed{\bar{a}_s = \frac{1}{10}(3t\vec{i} + t\bar{j} - 13t\bar{k})\ m/s^2}$$

Έχουμε τώρα:

$$m_i a_i = \sum_{i=1}^{N} F_{εσ.i} + \sum_{j=1}^{N} \bar{F}_{εξ\, j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_2 \bar{a}_2 = \bar{F}_{εσ2} + \bar{F}_2 \Rightarrow \bar{a}_2 = \frac{1}{m_2}\left(\bar{F}_{εσ2} + \bar{F}_2\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(-2t\bar{j} + t\bar{i} + 2t\bar{j} - 8t\bar{k}\right)$$

▲ Όταν $\Sigma\vec{F}$ είναι διατηρητική δύναμη τότε ισχύει η ΑΔΜΕ:

$$E = E_{KIN} + E_{ΔΥΝ}.$$

Αν $\Sigma\bar{F}$ δεν είναι διατηρητική τότε δεν ισχύει η ΑΔΜΕ

π.χ. η τριβή η οποία θα αφαιρεί ενέργεια από το σύστημα.

Αδρανειακό Σύστημα: παρατηρητής ακίνητος

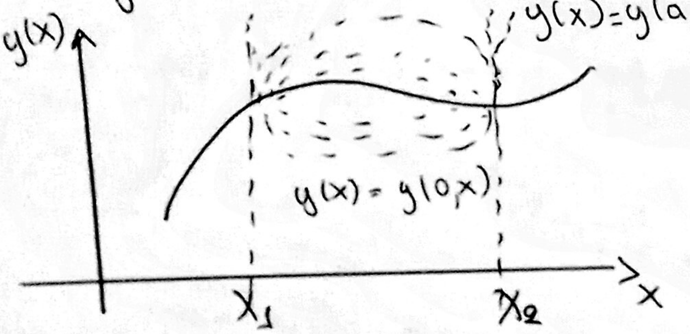
Λογισμός Μεταβολών

Βασικό πρόβλημα που θέλουμε να μελετήσουμε είναι να βρούμε την συνάρτηση $y=y(x)$ τ.ω. το:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x))\,dx$$, να είναι ακρότατο (ελάχιστο)

1) Πρέπει να γνωρίζουμε τι γίνεται στα x_1, x_2

Γράφουμε τη συνάρτηση $y=y(a,x)$ τ.ω. $y(0,x)$ που είναι γνωστή συνάρτηση.



Θ. Taylor $1^{ης}$ τάξης πληροφορία

$$y(a,x) = y(0,x) + a h(x).$$

$h(x)$: συνεχής και παραγωγίσιμη συναρτ.

$$\left.\begin{array}{l} y(a,x_1) = y(0,x_1) \\ y(a,x_2) = y(0,x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow h(x_1) = h(x_2) = 0$$

Τελικά, έχω : $J(a) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(a,x), y'(a,x), x)\, dx$

Μέθοδος αριστοποίησης

Τότε το ακρότατο (ελάχιστο) θα δίνεται από την έκφραση

$$\left.\frac{\partial J(a,x)}{\partial a}\right|_{a=0} = 0$$ αναγκαία συνθήκη

Παράδειγμα

$f = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ στο $J = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ και λύση των $y(x) = x$

$f(x, y(x), y'(x))$

Τότε $h(x) = \sin x$, όπου $y(a,x) = y(x) + ah(x) = x + a\sin x$

άρα: $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (1 + a\cos x)^2$, $J(a) = \int_0^{2\pi} (1 + a\cos x)^2 dx =$

$$= \int_0^{2\pi} (1 + 2a\cos x + a^2\cos^2 x)\, dx = 2\pi + a^2\pi$$

Ελαχιστοποιείται όταν το $a = 0$ άρα $J(a) = 2\pi$.

Εξισώσεις Euler (ή Euler - Lagrange)

αριθμός Euler : e υπερβατικός αριθμός
(άπειρα ψηφία χωρίς περιοδικότητα)

Έστω ότι το συναρτησοειδές είναι το :

$J(a) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(a,x), y'(a,x), x)\, dx$ τότε

παραγωγίζω : $\frac{\partial J}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x)\, dx$ επίσης, ισχύει

η $y(a,x) = y(0,x) + ah(x)$, $y'(a,x) = y'(0,x) + ah'(x)$

άρα, $\frac{\partial f(y,y')}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial a} = h(x)\frac{\partial f}{\partial y} + h'(x)\frac{\partial f}{\partial y'}$

Δηλ.: $\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\int_{x_1}^{x_2} f(y,y',x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial a}\,dx =$

$$= \int_{x_1}^{x_2}\left(h(x)\frac{\partial f}{\partial y} + h'(x)\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx \; =$$

> παρατήρηση

$$\int_{x_1}^{x_2} h'(x)\frac{\partial f}{\partial y'}\,dx \overset{\text{παραγ}}{\underset{\text{ολοκλ}}{=}} h(x)\frac{\partial f}{\partial y'}\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} h(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} h(x)\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right)dx$$ και στη γειτονιά για $a=0$

έχουμε $\frac{\partial J}{\partial a}\Big|_{a=0} = \int_{x_1}^{x_2} h(x)\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right)dx = 0$

άρα αναγκαία συνθήκη για να είναι το ολοκλ. $=0$ είναι η εξής:

$\forall\, h(x)$: $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$ τότε αυτή η εξίσωση ονομάζεται εξίσωση του Euler - Lagrange

▶ Αρχή Ελαχίστης Δράσης ή Hamilton

Έστω Υ.Σ. ή σωματίδιο που ξεκινάει από το σημείο Α $t_A \to B$ (t_B), ακολουθεί την διαδρομή εκείνη για την οποία η ποσότητα ή η δράση

$S = \int_{t_A}^{t_B} L\,dt$, είναι στατική (με την έννοια του ακρότατου)

Τότε, η ποσότητα $L = E_{κιν} - E_{δυν}$ ονομάζεται συνάρτηση Lagrange ή λαγκραντζιανή του συστήματος.

Παράδειγμα

ΥΣ που κινείται με σταθερή ταχύτητα $|\bar{u}| = u$, δεν επιδρούν άλλες δυνάμεις, τότε $L = \frac{1}{2} m u^2$.

Παρατήρηση

Υπό την προϋπόθεση ότι οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι διατηρητικές (δηλ. δεν υπάρχουν τριβές στο σύστημα ή στη κίνηση του Υ.Σ.)

Τότε: $E = E_{KIN} + E_{ΔΥΝ} = T + V \Rightarrow L = T - V = \frac{1}{2} m u^2 - V(x)$

Άρα συμπεραίνουμε:

→ για να ελαχιστοποιήσουμε τη δράση:

$$S = \int_{t_A}^{t_B} L\,dt \quad , \text{ γράφουμε : } L = L\,(x(t), x'(t), t)$$

και

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0}$$ εξίσωση Euler - Lagrange.

Π.Χ. Να βρεθούν οι εξισώσεις κίνησης Υ.Σ. ή σωματιδίου μάζας m που κινείται μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας της Γης.

Λύση

$$E_{KIN} = \frac{1}{2} m |\dot{r}|^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$E_{ΔΥΝ} = V(\bar{r}) = V(x,y,z) = mgz\bar{k} \quad , \quad |V(\bar{r})| = mgz$$

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz.$$

Οι αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0 \Rightarrow -\frac{d}{dt} m\dot{y} = 0 \Rightarrow m\ddot{y} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \Rightarrow -\frac{d}{dt} m\dot{x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = 0 \Rightarrow -mg - \frac{d}{dt} m\dot{z} = 0 \Rightarrow m\ddot{z} + mg = 0 \quad (3)$$

(1),(2),(3) εξισώσεις κίνησης του ΥΣ ή 2ος ΝΝ.